Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/1.ª Fase

8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 2, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:
Semiperímetro × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:
$\pi\, r\, g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica:
$4\, \pi\, r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro recto:
$2\, \pi\, r\, g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- média de X:

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- desvio padrão de X:

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

GRUPO I

Um dos jogos mais populares da feira anual de Vila Nova de Malmequeres é a Roda da Fortuna.

Neste jogo, cada jogada consiste em girar, aleatoriamente, uma roda que está dividida em três sectores circulares com áreas diferentes e numerados de acordo com o esquema da Figura 1.

Para jogar, uma pessoa tem, previamente, de se inscrever, de indicar o número de jogadas que pretende realizar e de efectuar o respectivo pagamento.

Sempre que a roda é posta a girar, quando esta pára, o ponteiro indica um sector. O prémio a receber em cada jogada corresponde ao valor, em euros, registado no sector indicado pelo ponteiro, no instante em que a roda pára.

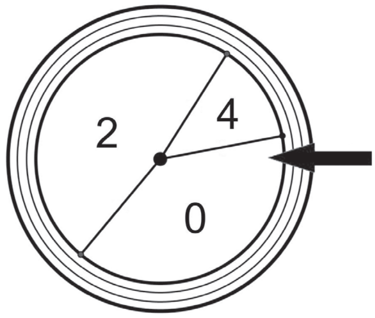

Figura 1

1. Seja X a variável aleatória «número registado no sector indicado pelo ponteiro no instante em que a roda pára, numa jogada».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	0	2	4
$P(X = x_i)$	$3a$	$0{,}48$	a

onde a representa um número real.

1.1. Mostre que $a = 0{,}13$

1.2. Na Roda da Fortuna, um jogador terá lucro apenas se o valor total que receber em prémios nas jogadas que realizar for superior ao valor total pago pela inscrição efectuada.

O Ivo inscreveu-se para realizar duas jogadas e pagou 4 euros por essa inscrição.

Mostre que a probabilidade de o Ivo obter lucro, com a realização das duas jogadas, é $0{,}1417$

2. Na edição de 2010 da feira anual, a organização do jogo Roda da Fortuna limitou o número total de inscrições no jogo. Estipulou que, em cada dia de feira, haveria, no máximo, mais 8 inscrições do que no dia anterior.

No final da feira desse ano, a organização revelou que, no primeiro dia, houve 6 inscrições no jogo Roda da Fortuna e que, nos restantes dias, se esgotou o número de inscrições estipulado para cada um dos dias.

2.1. Determine o número de inscrições feitas no décimo dia da feira anual de 2010.

2.2. Admita que, nos dois últimos dias da feira anual de 2010, houve um total de 340 inscrições na Roda da Fortuna.

Determine o número de dias que durou a feira anual de 2010.

GRUPO II

O Rui é um estudante de Acústica que vive na zona do porto de Leixões e se interessa por assuntos relacionados com o mar.

1. A Figura 2 apresenta parte da tabela publicada pelo Instituto Hidrográfico com as previsões das alturas de maré, no porto de Leixões, para os sete primeiros dias do mês de Julho de 2010.

Os valores das alturas estão em metros e o tempo é indicado em horas e minutos de cada dia.

Com base nos dados da tabela publicada pelo Instituto Hidrográfico, o Rui obteve, por regressão sinusoidal, a seguinte expressão, que relaciona a altura de maré, M, em metros, no porto de Leixões, com o tempo, t, em horas, contado a partir das zero horas do dia 1 de Julho de 2010:

$$M(t) = 2 + 1{,}02\ \text{sen}(0{,}50t - 1{,}44) \quad \text{para } t \geq 0$$

O argumento da função seno está em radianos.

	Hora		**Altura**
	h	min	m
1 QUI			
2 SEX	0	10	1,0
	6	21	2,8
	12	18	1,1
	18	36	3,0
3 SÁB	0	50	1,1
	7	3	2,7
	13	2	1,3
	19	19	2,8
4 DOM	1	35	1,2
	7	52	2,7
	13	54	1,4
	20	10	2,7
5 SEG	2	28	1,3
	8	50	2,6
	14	57	1,4
	21	10	2,7
6 TER	3	30	1,3
	9	55	2,6
	16	8	1,4
	22	18	2,7
7 QUA	4	36	1,3
	11	0	2,7
	17	17	1,3
	23	25	2,7

Figura 2

1.1. Descreva, com base na expressão obtida pelo Rui, a previsão da variação da altura de maré durante o primeiro dia de Julho de 2010, indicando os instantes entre os quais a maré subiria e os instantes entre os quais a maré desceria.

Apresente os valores em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, utilize valores arredondados às centésimas.

1.2. Determine a diferença entre a altura de maré prevista pelo Instituto Hidrográfico para as 18 horas e 36 minutos do dia 2 de Julho de 2010 e a altura de maré, para o mesmo instante, dada pela expressão obtida pelo Rui.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve pelo menos três casas decimais.

2. A intensidade de um som relaciona-se com a amplitude da onda sonora.

Considera-se que o nível sonoro, N, medido em decibéis (dB), é função da intensidade sonora, I, medida em watt por metro quadrado $(\mathrm{W/m^2})$, de acordo com a igualdade

$$N = 120 + 10\log_{10}(I) \quad \text{para } I > 0$$

2.1. A legislação portuguesa estipula que, para veículos motorizados de duas rodas de $125\,\mathrm{cm}^3$ de cilindrada, o nível sonoro desses veículos, quando em funcionamento, não deve exceder o limite máximo de $105\ \mathrm{dB}$

Determine o valor da intensidade sonora, em $\mathrm{W/m^2}$, que corresponde ao limite de $105\ \mathrm{dB}$

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

2.2. O Rui fez um trabalho escolar em que relacionou a intensidade sonora com o nível sonoro.

Nesse trabalho, incluiu uma tabela que continha, para diferentes tipos de fontes sonoras, as respectivas intensidades, em $\mathrm{W/m^2}$, e os respectivos níveis sonoros, em dB

Apresenta-se, a seguir, parte dessa tabela.

Fonte sonora	**Brisa por entre as folhas das árvores**	**Grande superfície comercial**	**Tráfego rodoviário (numa via rápida)**	**Concerto de música *rock***	**Avião a jacto**
Intensidade sonora $(\mathbf{W/m^2})$	10^{-10}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-1}	10^{2}
Nível sonoro $(\mathbf{dB})$	20	60	80	110	140

O texto seguinte é um excerto do trabalho elaborado pelo Rui.

«De acordo com o modelo que relaciona o nível sonoro com a intensidade sonora, podemos concluir que:

I) o nível sonoro de 0 decibéis, que marca o limiar inferior da audição humana, corresponde a uma intensidade de $0{,}000\ 000\ 000\ 01\,\mathrm{W/m^2}$

II) ao compararmos o nível sonoro provocado pela sirene de um navio, cuja intensidade é cerca de $5\,\mathrm{W/m^2}$, com os níveis sonoros mais elevados que constam da tabela, verificamos que esse nível sonoro está mais próximo do nível sonoro registado no concerto de música *rock* do que do nível sonoro registado no funcionamento do avião a jacto;

III) a intensidade sonora do avião a jacto em funcionamento é cerca de 600 vezes superior à intensidade sonora causada pelo tráfego rodoviário que circula numa via rápida.»

As conclusões I), II) e III) formuladas pelo Rui são todas incorrectas.

Elabore uma pequena composição na qual, para cada uma das conclusões formuladas pelo Rui, apresente uma razão que fundamente a respectiva incorrecção.

GRUPO III

Almada Negreiros, escritor e artista plástico, concebeu, no final da década de 1950, um conjunto de quadros de natureza abstracta, nos quais a Geometria e o Número são o tema central.

A Figura 3 apresenta uma fotografia de um desses quadros, *A Porta da Harmonia*, um óleo sobre tela, pintado a preto e branco.

A Figura 4, que não está à escala, mostra uma composição geométrica representativa do quadro, constituída pelos quadrados $[OPQR]$, $[ABCD]$, $[EFGH]$ e $[IFJL]$ e posicionada no primeiro quadrante de um referencial ortogonal e monométrico xOy

Os lados $[OP]$ e $[OR]$ do quadrado $[OPQR]$ estão contidos, respectivamente, no semieixo positivo Ox e no semieixo positivo Oy desse referencial.

Figura 3

Considere que:

- $[ABCD]$ está inscrito em $[OPQR]$
- o ponto B tem coordenadas $(14,\ 6)$
- o ponto A tem abcissa 6
- os vértices de $[EFGH]$ são os pontos médios dos lados de $[ABCD]$
- $[IFJL]$ está contido em $[ABCD]$
- a razão de semelhança entre $[EFGH]$ e $[IFJL]$ é $\sqrt{2}$
- o ponto M é o ponto de intersecção de $[EF]$ com $[IL]$

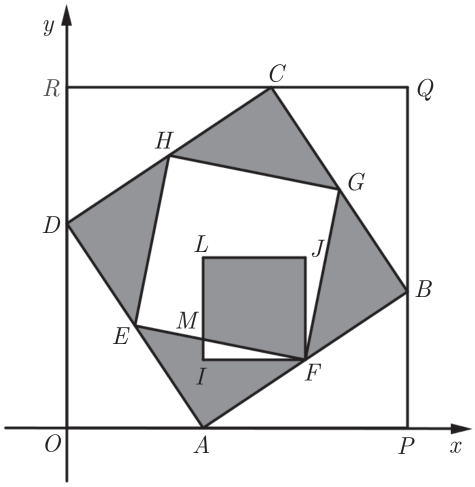

Figura 4

1. Mostre que $\overline{AD} = 10$

2. Mostre que o comprimento do lado do quadrado $[IFJL]$ é exactamente metade do comprimento do lado do quadrado $[ABCD]$

Sugestão – Na sua resposta, poderá começar por calcular o comprimento do lado do quadrado $[EFGH]$ e utilizar a razão de semelhança entre os quadrados $[EFGH]$ e $[IFJL]$ para calcular o comprimento do lado do quadrado $[IFJL]$

3. Admita que o quadrado $[IFJL]$ pode rodar em torno do ponto F, de modo a $\overline{IM}$ tomar valores entre 0 e 5, e que, nesse movimento, o triângulo $[IFM]$ se mantém não sombreado.

Considere $\overline{IM} = k$

Seja g a função real de variável real definida por

$$g(k) = 75 - 5k \quad \text{com } 0 \leq k \leq 5$$

Para cada valor de k, a função g permite obter a área da parte da composição representada a sombreado.

Existe algum valor de k para o qual a área da parte da composição representada a sombreado corresponda a 40% da área do quadrado $[OPQR]$?

Justifique a sua resposta.

GRUPO IV

A Jalur é uma empresa que produz, artesanalmente, janelas de estilo antigo para o mercado de uma certa região. O gestor da Jalur sabe que a empresa consegue vender, nesse mercado, todas as janelas que produzir.

As janelas de estilo antigo produzidas pela Jalur são de dois tipos: Tipo I e Tipo II.

Sabe-se que:

– para produzir uma janela do Tipo I, são necessárias uma hora na secção de corte, três horas na secção de polimento e duas horas na secção de acabamentos;

– para produzir uma janela do Tipo II, são necessárias uma hora na secção de corte, duas horas na secção de polimento e uma hora na secção de acabamentos;

– as secções de produção da Jalur têm, semanalmente, a seguinte disponibilidade:

- secção de corte: 16 horas;
- secção de polimento: 36 horas;
- secção de acabamentos: 22 horas.

O lucro que a Jalur obtém ao vender uma janela do Tipo I é 30 euros, e o que obtém ao vender uma janela do Tipo II é 25 euros.

Designe por x o número de janelas do Tipo I produzidas, semanalmente, pela Jalur, e designe por y o número de janelas do Tipo II produzidas, semanalmente, pela Jalur.

1. É possível a Jalur produzir um total de 15 janelas de estilo antigo, numa semana?

Justifique a sua resposta.

2. Determine quantas janelas do Tipo I e quantas janelas do Tipo II deve a Jalur produzir, semanalmente, para, nas condições referidas, obter o lucro máximo.

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objectivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- calcular o número de janelas do Tipo I e o número de janelas do Tipo II que a Jalur deve produzir, semanalmente, correspondentes à solução do problema.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.
   1.1. .... 10 pontos
   1.2. .... 20 pontos

2.
   2.1. .... 10 pontos
   2.2. .... 15 pontos

55 pontos

GRUPO II

1.
   1.1. .... 15 pontos
   1.2. .... 15 pontos

2.
   2.1. .... 20 pontos
   2.2. .... 20 pontos

70 pontos

GRUPO III

1. .... 10 pontos

2. .... 20 pontos

3. .... 15 pontos

45 pontos

GRUPO IV

1. .... 10 pontos

2. .... 20 pontos

30 pontos

TOTAL .... **200 pontos**